

令和8年度 前期日程 入学者選抜学力検査問題
 生命化学科・森林科学科 数学 配点および解答例

1 60点 【(1) 10点 (2) 30点 (3) 20点】

(1) $x^2 - 4x + 3 = (x-1)(x-3)$ なので

$$x \leq 1, x \geq 3 \text{ において } |x^2 - 4x + 3| = x^2 - 4x + 3$$

$$1 \leq x \leq 3 \text{ において } |x^2 - 4x + 3| = -x^2 + 4x - 3$$

$$\begin{aligned} \text{よって } \int_0^3 |x^2 - 4x + 3| dx &= \int_0^1 (x^2 - 4x + 3) dx + \int_1^3 (-x^2 + 4x - 3) dx \\ &= \left[\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x \right]_0^1 + \left[-\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - 3x \right]_1^3 = \frac{8}{3} \cdots (\text{答}) \end{aligned}$$

(2) $x^2 - tx - 3x + 3t = (x-t)(x-3)$ なので

(i) $t < 0$ のとき

$$0 \leq x \leq 3 \text{ において } |x^2 - tx - 3x + 3t| = -x^2 + (t+3)x - 3t$$

$$\text{よって } f(t) = \int_0^3 \{-x^2 + (t+3)x - 3t\} dx = \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}(t+3)x^2 - 3tx \right]_0^3 = -\frac{9}{2}t + \frac{9}{2}$$

(ii) $0 \leq t \leq 3$ のとき

$$0 \leq x \leq t \text{ において } |x^2 - tx - 3x + 3t| = x^2 - (t+3)x + 3t$$

$$t \leq x \leq 3 \text{ において } |x^2 - tx - 3x + 3t| = -x^2 + (t+3)x - 3t$$

$$\begin{aligned} \text{よって } f(t) &= \int_0^t \{x^2 - (t+3)x + 3t\} dx + \int_t^3 \{-x^2 + (t+3)x - 3t\} dx \\ &= \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}(t+3)x^2 + 3tx \right]_0^t + \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}(t+3)x^2 - 3tx \right]_t^3 = -\frac{1}{3}t^3 + 3t^2 - \frac{9}{2}t + \frac{9}{2} \end{aligned}$$

(iii) $t > 3$ のとき

$$0 \leq x \leq 3 \text{ において } |x^2 - tx - 3x + 3t| = x^2 - (t+3)x + 3t$$

$$\text{よって } f(t) = \int_0^3 \{x^2 - (t+3)x + 3t\} dx = \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}(t+3)x^2 + 3tx \right]_0^3 = \frac{9}{2}t - \frac{9}{2}$$

ゆえに (i), (ii), (iii) より

$$f(t) = \begin{cases} -\frac{9}{2}t + \frac{9}{2} & (t < 0) \\ -\frac{1}{3}t^3 + 3t^2 - \frac{9}{2}t + \frac{9}{2} & (0 \leq t \leq 3) \cdots (\text{答}) \\ \frac{9}{2}t - \frac{9}{2} & (t > 3) \end{cases}$$

(3) (2) の結果より

(i) $t < 0$ において $f'(t) = -\frac{9}{2} < 0$

(ii) $0 \leq t \leq 3$ において $f'(t) = -t^2 + 6t - \frac{9}{2} = -\left\{t - \left(3 - \frac{3}{2}\sqrt{2}\right)\right\}\left\{t - \left(3 + \frac{3}{2}\sqrt{2}\right)\right\}$

よって $0 \leq t < 3 - \frac{3}{2}\sqrt{2}$ において $f'(t) < 0$

$t = 3 - \frac{3}{2}\sqrt{2}$ において $f'(t) = 0$

$3 - \frac{3}{2}\sqrt{2} < t \leq 3$ において $f'(t) < 0$

(iii) $t > 3$ において $f'(t) = \frac{9}{2} > 0$

ゆえに (i), (ii), (iii) より $f(t)$ の増減表は以下のとおり

t	...	0	...	$3 - \frac{3}{2}\sqrt{2}$...	3	...
$f'(x)$	-	-	-	0	+	+	+
$f(x)$	↘	$\frac{9}{2}$	↘	$f\left(3 - \frac{3}{2}\sqrt{2}\right)$	↗	9	↗

したがって $f(t)$ が最小となる t の値は $t = 3 - \frac{3}{2}\sqrt{2}$... (答)

2 70点 【(1) 20点 (2) 20点 (3) 30点】

(1) $\angle B, \angle D$ の大きさをそれぞれ B, D とする

$$\triangle ABC \text{ において余弦定理を用いると } AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos B = 41 - 40 \cos B \cdots \textcircled{1}$$

$$\triangle ACD \text{ において余弦定理を用いると } AC^2 = CD^2 + DA^2 - 2CD \cdot DA \cdot \cos D = 146 - 110 \cos D \cdots \textcircled{2}$$

$$\text{四角形 } ABCD \text{ は円に内接するので } \cos D = -\cos B \cdots \textcircled{3}$$

$$\textcircled{2}, \textcircled{3} \text{ より } AC^2 = 146 + 110 \cos B \cdots \textcircled{4}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{4} \text{ より } \cos B = -\frac{7}{10} \cdots \textcircled{5}$$

$$0 < B < \pi \text{ を踏まえると } \textcircled{5} \text{ より } \sin B = \sqrt{1 - \cos^2 B} = \frac{\sqrt{51}}{10} \cdots \textcircled{6}$$

$$\text{四角形 } ABCD \text{ は円に内接するので } \sin D = \sin B = \frac{\sqrt{51}}{10} \cdots \textcircled{7}$$

$\triangle ABC$ の面積を S_1 , $\triangle ACD$ の面積を S_2 とすると $AB = 4, BC = 5, CD = 5, DA = 11$ および $\textcircled{6}, \textcircled{7}$ より

$$S_1 = \frac{1}{2} AB \cdot BC \cdot \sin B = \sqrt{51} \cdots \textcircled{8}$$

$$S_2 = \frac{1}{2} CD \cdot DA \cdot \sin D = \frac{11\sqrt{51}}{4} \cdots \textcircled{9}$$

よって $\textcircled{8}, \textcircled{9}$ より四角形 $ABCD$ の面積は $\frac{15\sqrt{51}}{4} \cdots$ (答)

$$(2) \frac{20}{a^2} + \frac{13}{b} = 1 \cdots \textcircled{10} \text{ の両辺に } a^2 b \text{ をかけると } a^2 b - 20b - 13a^2 = 0 \cdots \textcircled{11}$$

$$c = a^2 - 20 \cdots \textcircled{12} \quad d = b - 13 \cdots \textcircled{13} \text{ とおくと } a, b \text{ は整数なので } c, d \text{ も整数}$$

$$\textcircled{11} \text{ を変形すると } \textcircled{12}, \textcircled{13} \text{ より } cd = 260 \cdots \textcircled{14}$$

よって $\textcircled{14}$ を満たす c と d の値の組 (c, d) の候補は

$$(\pm 1, \pm 260), (\pm 2, \pm 130), (\pm 4, \pm 65), (\pm 5, \pm 52), (\pm 10, \pm 26), (\pm 13, \pm 20), (\pm 20, \pm 13), (\pm 26, \pm 10), (\pm 52, \pm 5),$$

$$(\pm 65, \pm 4), (\pm 130, \pm 2), (\pm 260, \pm 1) \text{ (複号同順)}$$

一方 $\textcircled{12}$ において a^2 は 1 以上の整数であることを踏まえると c の値の候補として 260 以下のものは $-19, -16, -11, -4, 5, 16, 29, 44, 61, 80, 101, 124, 149, 176, 205, 236$

$$\text{ゆえに } (c, d) = (-4, -65), (5, 52) \cdots \textcircled{15}$$

したがって $\textcircled{12}, \textcircled{13}, \textcircled{15}$ より $(a, b) = (4, -52), (-4, -52), (5, 65), (-5, 65) \cdots$ (答)

$$(3) 2 \sin x \cos x = \sin 2x, 2 \sin^2 x - 1 = \sin^2 x - \cos^2 x = -\cos 2x \text{ なので } f(x) = 6 \sin 2x - 8 \cos 2x \cdots \textcircled{16}$$

$$0 < \theta < \frac{\pi}{2}, \sin \theta = \frac{4}{5} \text{ を満たす } \theta \text{ に対して } \cos \theta = \sqrt{1 - \sin^2 \theta} = \frac{3}{5} \cdots \textcircled{17}$$

$$\textcircled{16}, \textcircled{17} \text{ より } f(x) = 10(\sin 2x \cos \theta - \cos 2x \sin \theta) = 10 \sin(2x - \theta) \cdots \textcircled{18}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} < \frac{4}{5} < \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ より } 0 < \theta < \frac{\pi}{2} \text{ を踏まえると } \sin \frac{\pi}{4} < \sin \theta < \sin \frac{\pi}{3} \text{ なので } \frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{3} \cdots \textcircled{19}$$

$$\text{よって } x = \frac{\pi}{4} \text{ のとき } \frac{\pi}{6} < 2x - \theta < \frac{\pi}{4}, x = \frac{\pi}{2} \text{ のとき } \frac{2\pi}{3} < 2x - \theta < \frac{3\pi}{4}$$

ゆえに $\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ の範囲において $2x - \theta = \frac{\pi}{2}$ を満たす x が存在するので $\textcircled{18}$ より $f(x)$ の最大値は 10 \cdots (答)

また $x = \frac{\pi}{4}$ と $x = \frac{\pi}{2}$ のときの $f(x)$ の値が最小値の候補であるが $\textcircled{16}$ より $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 6, f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 8$ なので $f(x)$ の最小値は 6 \cdots (答)

3 70点 【(1)7点 (2)21点 (3)42点】

(1) 円 C_1 の方程式を変形すると $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 9$

よって C_1 の中心を O_1 , 半径を r_1 とすると $O_1(1, -1) \dots \textcircled{1}$ $r_1 = 3 \dots \textcircled{2}$

直線 l の方程式を変形すると $x - y + k = 0 \dots \textcircled{3}$

よって O_1 と l の距離を d とすると $\textcircled{1}, \textcircled{3}$ より $d = \frac{|k+2|}{\sqrt{2}} \dots \textcircled{4}$

C_1 と l は共有点をもたないことから $d > r_1$ なので $\textcircled{2}, \textcircled{4}$ より $\frac{|k+2|}{\sqrt{2}} > 3$

ゆえに $k > 0$ を踏まえると $k > 3\sqrt{2} - 2 \dots \textcircled{5} \dots$ (答)

(2) 点 P の座標を (s, t) , 点 Q の座標を (x, y) とすると Q は $\triangle PAB$ の重心なので

$$x = \frac{s-k}{3} \dots \textcircled{6} \quad y = \frac{t+k}{3} \dots \textcircled{7}$$

$$\textcircled{6}, \textcircled{7} \text{ より } s = 3x + k \dots \textcircled{8} \quad t = 3y - k \dots \textcircled{9}$$

P は C_1 上の点なので $(s-1)^2 + (t+1)^2 = 9 \dots \textcircled{10}$

$$\textcircled{8}, \textcircled{9}, \textcircled{10} \text{ より } \left(x + \frac{k-1}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{k-1}{3}\right)^2 = 1$$

よって P が C_1 上を動くとき Q は円上を動く (証明終わり)

また円 C_2 の方程式は $\left(x + \frac{k-1}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{k-1}{3}\right)^2 = 1 \dots$ (答)

(3) C_2 の中心を O_2 , 半径を r_2 とすると (2) より $O_2\left(-\frac{k-1}{3}, \frac{k-1}{3}\right) \dots \textcircled{11}$ $r_2 = 1 \dots \textcircled{12}$

$$\textcircled{11}, \textcircled{12} \text{ より } k > 0 \text{ を踏まえると } C_1 \text{ と } C_2 \text{ の中心間の距離は } O_1O_2 = \frac{\sqrt{2}}{3}(k+2) \dots \textcircled{13}$$

2つの円がただ1つの共有点をもつのは、2つの円が内接または外接するときであるため、この2つの場合について考えると

(i) C_1 と C_2 が内接すると仮定すると $O_1O_2 = |r_1 - r_2|$ より $k = 3\sqrt{2} - 2$ であるが $\textcircled{5}$ が満たさないので矛盾

(ii) C_1 と C_2 が外接すると仮定すると $O_1O_2 = r_1 + r_2$ より $k = 6\sqrt{2} - 2$ であり $\textcircled{5}$ が満たされる

よって (i), (ii) より C_1 と C_2 がただ1つの共有点をもつときの k の値は $k = 6\sqrt{2} - 2 \dots$ (答)

令和8年度 前期日程 入学者選抜学力検査問題
理工情報学科 数学 配点および解答例

2 100点 【(1) 30点 (2) 30点 (3) 40点】

(1) $\angle B, \angle D$ の大きさをそれぞれ B, D とする

$$\triangle ABC \text{ において余弦定理を用いると } AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos B = 41 - 40 \cos B \cdots \textcircled{1}$$

$$\triangle ACD \text{ において余弦定理を用いると } AC^2 = CD^2 + DA^2 - 2CD \cdot DA \cdot \cos D = 146 - 110 \cos D \cdots \textcircled{2}$$

$$\text{四角形 } ABCD \text{ は円に内接するので } \cos D = -\cos B \cdots \textcircled{3}$$

$$\textcircled{2}, \textcircled{3} \text{ より } AC^2 = 146 + 110 \cos B \cdots \textcircled{4}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{4} \text{ より } \cos B = -\frac{7}{10} \cdots \textcircled{5}$$

$$0 < B < \pi \text{ を踏まえると } \textcircled{5} \text{ より } \sin B = \sqrt{1 - \cos^2 B} = \frac{\sqrt{51}}{10} \cdots \textcircled{6}$$

$$\text{四角形 } ABCD \text{ は円に内接するので } \sin D = \sin B = \frac{\sqrt{51}}{10} \cdots \textcircled{7}$$

$\triangle ABC$ の面積を S_1 , $\triangle ACD$ の面積を S_2 とすると $AB = 4, BC = 5, CD = 5, DA = 11$ および $\textcircled{6}, \textcircled{7}$ より

$$S_1 = \frac{1}{2} AB \cdot BC \cdot \sin B = \sqrt{51} \cdots \textcircled{8}$$

$$S_2 = \frac{1}{2} CD \cdot DA \cdot \sin D = \frac{11\sqrt{51}}{4} \cdots \textcircled{9}$$

よって $\textcircled{8}, \textcircled{9}$ より四角形 $ABCD$ の面積は $\frac{15\sqrt{51}}{4} \cdots$ (答)

(2) $\frac{20}{a^2} + \frac{13}{b} = 1 \cdots \textcircled{10}$ の両辺に $a^2 b$ をかけると $a^2 b - 20b - 13a^2 = 0 \cdots \textcircled{11}$

$$c = a^2 - 20 \cdots \textcircled{12} \quad d = b - 13 \cdots \textcircled{13} \text{ とおくと } a, b \text{ は整数なので } c, d \text{ も整数}$$

$$\textcircled{11} \text{ を変形すると } \textcircled{12}, \textcircled{13} \text{ より } cd = 260 \cdots \textcircled{14}$$

よって $\textcircled{14}$ を満たす c と d の値の組 (c, d) の候補は

$$(\pm 1, \pm 260), (\pm 2, \pm 130), (\pm 4, \pm 65), (\pm 5, \pm 52), (\pm 10, \pm 26), (\pm 13, \pm 20), (\pm 20, \pm 13), (\pm 26, \pm 10), (\pm 52, \pm 5),$$

$$(\pm 65, \pm 4), (\pm 130, \pm 2), (\pm 260, \pm 1) \text{ (複号同順)}$$

一方 $\textcircled{12}$ において a^2 は 1 以上の整数であることを踏まえると c の値の候補として 260 以下のものは $-19, -16, -11, -4, 5, 16, 29, 44, 61, 80, 101, 124, 149, 176, 205, 236$

$$\text{ゆえに } (c, d) = (-4, -65), (5, 52) \cdots \textcircled{15}$$

したがって $\textcircled{12}, \textcircled{13}, \textcircled{15}$ より $(a, b) = (4, -52), (-4, -52), (5, 65), (-5, 65) \cdots$ (答)

(3) $2 \sin x \cos x = \sin 2x, 2 \sin^2 x - 1 = \sin^2 x - \cos^2 x = -\cos 2x$ なので $f(x) = 6 \sin 2x - 8 \cos 2x \cdots \textcircled{16}$

$$0 < \theta < \frac{\pi}{2}, \sin \theta = \frac{4}{5} \text{ を満たす } \theta \text{ に対して } \cos \theta = \sqrt{1 - \sin^2 \theta} = \frac{3}{5} \cdots \textcircled{17}$$

$$\textcircled{16}, \textcircled{17} \text{ より } f(x) = 10(\sin 2x \cos \theta - \cos 2x \sin \theta) = 10 \sin(2x - \theta) \cdots \textcircled{18}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} < \frac{4}{5} < \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ より } 0 < \theta < \frac{\pi}{2} \text{ を踏まえると } \sin \frac{\pi}{4} < \sin \theta < \sin \frac{\pi}{3} \text{ なので } \frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{3} \cdots \textcircled{19}$$

$$\text{よって } x = \frac{\pi}{4} \text{ のとき } \frac{\pi}{6} < 2x - \theta < \frac{\pi}{4}, x = \frac{\pi}{2} \text{ のとき } \frac{2\pi}{3} < 2x - \theta < \frac{3\pi}{4}$$

ゆえに $\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ の範囲において $2x - \theta = \frac{\pi}{2}$ を満たす x が存在するので $\textcircled{18}$ より $f(x)$ の最大値は 10 \cdots (答)

また $x = \frac{\pi}{4}$ と $x = \frac{\pi}{2}$ のときの $f(x)$ の値が最小値の候補であるが $\textcircled{16}$ より $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 6, f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 8$ なので $f(x)$ の最小値は 6 \cdots (答)

3 100点 【(1) 10点 (2) 30点 (3) 60点】

(1) 円 C_1 の方程式を変形すると $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 9$

よって C_1 の中心を O_1 , 半径を r_1 とすると $O_1(1, -1) \dots \textcircled{1}$ $r_1 = 3 \dots \textcircled{2}$

直線 l の方程式を変形すると $x - y + k = 0 \dots \textcircled{3}$

よって O_1 と l の距離を d とすると $\textcircled{1}, \textcircled{3}$ より $d = \frac{|k+2|}{\sqrt{2}} \dots \textcircled{4}$

C_1 と l は共有点をもたないことから $d > r_1$ なので $\textcircled{2}, \textcircled{4}$ より $\frac{|k+2|}{\sqrt{2}} > 3$

ゆえに $k > 0$ を踏まえると $k > 3\sqrt{2} - 2 \dots \textcircled{5} \dots$ (答)

(2) 点 P の座標を (s, t) , 点 Q の座標を (x, y) とすると Q は $\triangle PAB$ の重心なので

$$x = \frac{s-k}{3} \dots \textcircled{6} \quad y = \frac{t+k}{3} \dots \textcircled{7}$$

$\textcircled{6}, \textcircled{7}$ より $s = 3x + k \dots \textcircled{8}$ $t = 3y - k \dots \textcircled{9}$

P は C_1 上の点なので $(s-1)^2 + (t+1)^2 = 9 \dots \textcircled{10}$

$$\textcircled{8}, \textcircled{9}, \textcircled{10} \text{ より } \left(x + \frac{k-1}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{k-1}{3}\right)^2 = 1$$

よって P が C_1 上を動くとき Q は円上を動く (証明終わり)

また円 C_2 の方程式は $\left(x + \frac{k-1}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{k-1}{3}\right)^2 = 1 \dots$ (答)

(3) C_2 の中心を O_2 , 半径を r_2 とすると (2) より $O_2\left(-\frac{k-1}{3}, \frac{k-1}{3}\right) \dots \textcircled{11}$ $r_2 = 1 \dots \textcircled{12}$

$\textcircled{11}, \textcircled{12}$ より $k > 0$ を踏まえると C_1 と C_2 の中心間の距離は $O_1O_2 = \frac{\sqrt{2}}{3}(k+2) \dots \textcircled{13}$

2つの円がただ1つの共有点をもつのは、2つの円が内接または外接するときであるため、この2つの場合について考えると

(i) C_1 と C_2 が内接すると仮定すると $O_1O_2 = |r_1 - r_2|$ より $k = 3\sqrt{2} - 2$ であるが $\textcircled{5}$ が満たさないので矛盾

(ii) C_1 と C_2 が外接すると仮定すると $O_1O_2 = r_1 + r_2$ より $k = 6\sqrt{2} - 2$ であり $\textcircled{5}$ が満たされる

よって (i), (ii) より C_1 と C_2 がただ1つの共有点をもつときの k の値は $k = 6\sqrt{2} - 2 \dots$ (答)

4 100点 【(1) 20点 (2) 50点 (3) 30点】

(1) $a_{n+1}r + b_{n+1} = (pr + q)^n \cdots \textcircled{1}$ の右辺を変形すると

$$(pr + q)^n = (pr + q)(a_n r + b_n) = pa_n r^2 + (pb_n + qa_n)r + qb_n \cdots \textcircled{2}$$

$$r^2 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \text{ なの} \text{ で } r^2 = r + 1 \cdots \textcircled{3}$$

$$\textcircled{2}, \textcircled{3} \text{ より } (pr + q)^n = \{(p + q)a_n + pb_n\}r + pa_n + qb_n \cdots \textcircled{4}$$

$$\text{よって } \textcircled{1}, \textcircled{4} \text{ より } \begin{cases} a_{n+1} = (p + q)a_n + pb_n \cdots \textcircled{5} \\ b_{n+1} = pa_n + qb_n \cdots \textcircled{6} \end{cases} \cdots \text{(答)}$$

(2) $\textcircled{5}$ より $a_{n+2} - qa_{n+1} = (p + q)a_{n+1} - (pq + q^2)a_n + p(b_{n+1} - qb_n) \cdots \textcircled{7}$

$$\textcircled{6}, \textcircled{7} \text{ より } a_{n+2} = (p + 2q)a_{n+1} + (p^2 - pq - q^2)a_n \cdots \textcircled{8}$$

2次方程式 $x^2 - (p + 2q)x - (p^2 - pq - q^2) = 0$ の判別式は $D = 5p^2 > 0$ なので

2つの異なる実数解を α, β ($\alpha > \beta$) とすると $\textcircled{8}$ より

$$\begin{cases} a_{n+2} - \beta a_{n+1} = \alpha(a_{n+1} - \beta a_n) \\ a_{n+2} - \alpha a_{n+1} = \beta(a_{n+1} - \alpha a_n) \end{cases}$$

よって

$$\begin{cases} a_{n+2} - \beta a_{n+1} = \alpha^n(a_2 - \beta a_1) \cdots \textcircled{9} \\ a_{n+2} - \alpha a_{n+1} = \beta^n(a_2 - \alpha a_1) \cdots \textcircled{10} \end{cases}$$

$$\text{よって}$$

$$\textcircled{9}, \textcircled{10} \text{ において } a_1 = 0, a_2 = p \text{ なの} \text{ で } a_n = \frac{\alpha^{n-1} - \beta^{n-1}}{\alpha - \beta} p \cdots \textcircled{11}$$

$$\textcircled{5}, \textcircled{11} \text{ より } b_n = \frac{\alpha^{n-1}(\alpha - p - q) - \beta^{n-1}(\beta - p - q)}{\alpha - \beta} \cdots \textcircled{12}$$

$$\alpha = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} p + q = pr + q \text{ なの} \text{ で } \alpha - p - q = p(r - 1) \cdots \textcircled{13}$$

$$\beta = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} p + q = p(1 - r) + q \text{ なの} \text{ で } \beta - p - q = -pr \cdots \textcircled{14}$$

$$\textcircled{12}, \textcircled{13}, \textcircled{14} \text{ より } b_n = \frac{\alpha^{n-1}(r - 1) + \beta^{n-1}r}{\alpha - \beta} p \cdots \textcircled{15}$$

$$\text{ゆえに } \rho = \frac{\beta}{\alpha} \text{ とおくと } \textcircled{11}, \textcircled{15} \text{ より } \frac{a_n}{b_n} = \frac{1 - \rho^{n-1}}{\rho^{n-1}r + r - 1} \cdots \textcircled{16}$$

したがって $\textcircled{16}$ において $|\rho| < 1$ を踏まえると $\textcircled{3}$ より $r - 1 = \frac{1}{r}$ なの} \text{ で } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = r \text{ (証明終わり)}

(3) $\textcircled{16}$ より $\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} - \frac{a_n}{b_n} = \frac{\rho^{n-1}(1 - \rho)(2r - 1)}{(\rho^n r + r - 1)(\rho^{n-1} r + r - 1)} \cdots \textcircled{17}$

$\textcircled{17}$ において $1 - \rho > 0, 2r - 1 > 0$ であり

さらに $q > \frac{p}{r}$ のとき $\rho > 0$ より $\rho^{n-1} > 0, \rho^n r + r - 1 > 0, \rho^{n-1} r + r - 1 > 0$ なの} \text{ で } \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} - \frac{a_n}{b_n} > 0

ゆえに $q > \frac{p}{r}$ のとき $n = 1, 2, 3, \dots$ に対して $\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} > \frac{a_n}{b_n}$ が成り立つ (証明終わり)

5 100点 【(1) 30点 (2) 40点 (3) 30点】

- (1) $f(x) = x^2 - 4x + k - \frac{2}{x}$ とおくと $f'(x) = 2x - 4 + \frac{2}{x^2} = \frac{2}{x^2}(x-1)(x^2 - x - 1)$
 よって $x > 0$ における $f(x)$ の増減表は以下のとおり

x	...	1	...	$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	$k-5$	↘	$k + \frac{1-5\sqrt{5}}{2}$	↗

$\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ なので $f(x) = 0$ が異なる 3 つの解をもつ条件は

$$k-5 > 0, k + \frac{1-5\sqrt{5}}{2} < 0$$

よって k のとりうる値の範囲は $5 < k < \frac{5\sqrt{5}-1}{2}$... (答)

- (2) α, β, γ はいずれも $f(x) = 0$ の解なので

$$\alpha^2 - 4\alpha + k - \frac{2}{\alpha} = 0 \quad \dots \textcircled{1} \quad \beta^2 - 4\beta + k - \frac{2}{\beta} = 0 \quad \dots \textcircled{2} \quad \gamma^2 - 4\gamma + k - \frac{2}{\gamma} = 0 \quad \dots \textcircled{3}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ より } \alpha^2 - \beta^2 - 4(\alpha - \beta) - \frac{2(\beta - \alpha)}{\alpha\beta} = 0$$

$$\alpha \neq 0, \alpha - \beta \neq 0 \text{ なので } \alpha^2 + (\beta - 4)\alpha + \frac{2}{\beta} = 0$$

$$\text{同様にすると } \textcircled{2}, \textcircled{3} \text{ より } \gamma^2 + (\beta - 4)\gamma + \frac{2}{\beta} = 0$$

よって α, γ は $t^2 + (\beta - 4)t + \frac{2}{\beta} = 0$ の異なる 2 つの解なので解と係数の関係より

$$\alpha + \gamma = 4 - \beta \quad \dots \textcircled{4} \quad \alpha\gamma = \frac{2}{\beta} \quad \dots \textcircled{5}$$

$$\text{ゆえに } \alpha^2 + \gamma^2 = (\alpha + \gamma)^2 - 2\alpha\gamma = \beta^2 - 8\beta + 16 - \frac{4}{\beta} \quad \dots \textcircled{6} \quad \dots \text{(答)}$$

$$\alpha^3 + \gamma^3 = (\alpha + \gamma)^3 - 3\alpha\gamma(\alpha + \gamma) = -\beta^3 + 12\beta^2 - 48\beta + 70 - \frac{24}{\beta} \quad \dots \textcircled{7} \quad \dots \text{(答)}$$

- (3) $\alpha < \beta < \gamma$ なので (1) より $\alpha \leq x \leq \beta$ において $f(x) \geq 0$, $\beta \leq x \leq \gamma$ において $f(x) \leq 0$

$$\text{よって } S = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx + \int_{\beta}^{\gamma} (-f(x)) dx$$

$$= \left[\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + kx - 2 \log x \right]_{\alpha}^{\beta} - \left[\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + kx - 2 \log x \right]_{\beta}^{\gamma}$$

$$= 2 \left(\frac{1}{3}\beta^3 - 2\beta^2 + k\beta - 2 \log \beta \right) - \left\{ \frac{1}{3}(\alpha^3 + \gamma^3) - 2(\alpha^2 + \gamma^2) + k(\alpha + \gamma) - 2 \log \alpha\gamma \right\} \quad \dots \textcircled{8}$$

ゆえに $\textcircled{2}, \textcircled{4}, \textcircled{5}, \textcircled{6}, \textcircled{7}, \textcircled{8}$ より

$$S = -2\beta^3 + 10\beta^2 - 16\beta - \frac{8}{\beta} - 6 \log \beta + 2 \log 2 + \frac{44}{3} \quad \dots \text{(答)}$$