令和4年度 前期日程 入学者選抜学力検査問題

数学（生命分子化学科・森林科学科）解答例

$\boxed{1}$

(1) 2022! を素因数分解したときの 5 の指数を求める。

2022 までの 5 の倍数の個数は、$\left[\dfrac{2022}{5}\right]=404$

同様に、5^2、5^3、5^4の倍数の個数を加えると

$\left[\dfrac{2022}{5}\right]+\left[\dfrac{2022}{5^2}\right]+\left[\dfrac{2022}{5^3}\right]+\left[\dfrac{2022}{5^4}\right]=404+80+16+3=503$

よって、2022! を素因数分解したときの 5 の指数は 503。

$m \leqq 503$ のとき 2022! は 5^m で割り切れるので、m の最大値は 503 である。

答え　503

(2) n^7-n を因数分解すると

$n^7-n = n(n^6-1) = n(n^3-1)(n^3+1) = n(n-1)(n+1)(n^2+n+1)(n^2-n+1)$

$(n-1)n(n+1)$は連続する 3 つの整数の積である。

連続する 2 つの整数のどちらか一方は偶数であるから、その積は 2 の倍数である。

また、連続する 3 つの整数のうちの 1 つは必ず 3 の倍数であるから、その積は 3 の倍数である。さらに、連続する 2 つの整数を含むので積は 2 の倍数でもある。

2 と 3 は互いに素であるから、$n(n-1)(n+1)$は 6 の倍数である。

一方、

$n=7k_1$ $(k_1=1, 2, 3,\cdots)$のとき n は 7 の倍数である。

$n=7k_2+1$ $(k_2=0, 1, 2,\cdots)$のとき $n-1$ は 7 の倍数である。

$n=7k_3+2$ $(k_3=0, 1, 2,\cdots)$のとき $n^2+n+1=7(7k_3^2+5k_3+1)$、

よって n^2+n+1 は 7 の倍数である。

$n=7k_4+3$ $(k_4=0, 1, 2,\cdots)$のとき $n^2-n+1=7(7k_4^2+5k_4+1)$、

よって n^2-n+1 は 7 の倍数である。

$n=7k_5+4$ $(k_5=0, 1, 2,\cdots)$のとき $n^2+n+1=7(7k_5^2+9k_5+3)$、

よって n^2+n+1 は 7 の倍数である。

$n=7k_6+5$ $(k_6=0, 1, 2,\cdots)$のとき $n^2-n+1=7(7k_6^2+9k_6+3)$、

よって n^2-n+1 は 7 の倍数である。

$n=7k_7+6$ $(k_7=0, 1, 2,\cdots)$のとき $n+1$ は 7 の倍数である。

よって、$n(n-1)(n+1)(n^2+n+1)(n^2-n+1)$ は因数のいずれかが 7 の倍数であるから、その積は 7 の倍数である。

6 と 7 は互いに素であるから、n^7-n は 42 の倍数である。

$\boxed{2}$

【解答例 1】

K の半径を r すると，$r=\sin\frac{\theta_1}{2}$ $(0<\theta_1<\pi)$…① $2\pi r=\theta_2$ $(0<\theta_2<2\pi)$ …② である．

①を②に代入して整理すると，

$\sin\frac{\theta_1}{2}=\frac{\theta_2}{2\pi}$ $(0<\theta_1<\pi, 0<\theta_2<2\pi)$ …③

$\sin x>\frac{2x}{\pi}$ $(0<x<\frac{\pi}{2})$ において，$x=\frac{\theta_1}{2}$（$0<\theta_1<\pi$）とすると，

$\sin\frac{\theta_1}{2}>\frac{\theta_1}{\pi}$（$0<\theta_1<\pi$）…④

③を④に代入すると，

$$\frac{\theta_2}{2\pi}>\frac{\theta_1}{\pi}\ (0<\theta_1<\pi, 0<\theta_2<2\pi)$$

整理すると，$\theta_2>2\theta_1$ $(0<\theta_1<\pi, 0<\theta_2<2\pi)$

よって，$\theta_1\neq\theta_2$である．

$\boxed{3}$

(1) 内接円の半径を r とすると△OAB の面積は，$\frac{3r}{2}+\frac{4r}{2}+\frac{5r}{2}=6$　よって $r=1$

内接円は，中心 $O_1(1, 1, 0)$，半径 1 の円である．

S_1 の中心 O_2，点 D(1，0，0)とすると，$\triangle O_1DO_2$ は直角三角形で，$O_1D=1$，

$O_2D=2$ より，$O_1O_2=\sqrt{3}$　よって S_1 の中心座標は $(1, 1, \sqrt{3})$

(2) Q(x, y, z)とすると，線分 BP を 1:1 に内分する点が Q なので，P は，

(2x, 2y−4, 2z)となる．これが S_1 上にあるので，

S_1 の方程式　$(x-1)^2+(y-1)^2+(z-\sqrt{3})^2=4$ に代入して，

$(2x-1)^2+(2y-5)^2+(2z-\sqrt{3})^2=4$

整理して，$(x-\frac{1}{2})^2+(y-\frac{5}{2})^2+(z-\frac{\sqrt{3}}{2})^2=1$　①

ゆえに，条件を満たす Q は球面①上にある．

逆に，球面①上の任意の点 Q(x, y, z)は，条件を満たす．

球面の中心座標は$(\frac{1}{2}, \frac{5}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$，半径は 1

(3) （S_2 の方程式は　$(x-3)^2+y^2+z^2=4$

円上の点 E (x，y，z)は S_1 および S_2 上にあるので，それぞれの方程式に代入し，整理すると　$2x-y-\sqrt{3}z-2=0$　②

円は平面②上にある．

平面②の法線ベクトルは　$\vec{n}=(2, -1, -\sqrt{3})$　また，$\overrightarrow{O2A}=(2, -1, -\sqrt{3})$

$\overrightarrow{O2A}=t\vec{n}$ となる実数 t (t=1)があるので，直線 O_2A は平面②に垂直である.）

S_1 と S_2 の半径は同じなので，O_2 と A の中点 $F(2, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$　は円の中心となる．

△AFE（$\triangle O_2FE$）は直角三角形で，$AF=O_2F=\sqrt{2}$　$AE=O_2E=2$ なので，

三平方の定理より，$FE=\sqrt{2}$　よって，円の中心座標は$(2, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$　半径は$\sqrt{2}$