令和 2 年度 前期日程 入学者選抜学力検査問題

環境・情報科学科 数学 解答例

$\boxed{1}$

(1) $m = x + \dfrac{1}{y},\ n = y + \dfrac{2}{x}$ とおくと m と n は自然数

$x < 0$ と仮定すると $1 = \dfrac{1}{y} \cdot y = (m - x)\left(n - \dfrac{2}{x}\right) = mn + 2 - nx - \dfrac{2m}{x} > 3$ なので矛盾

$y < 0$ と仮定すると $2 = x \cdot \dfrac{2}{x} = \left(m - \dfrac{1}{y}\right)(n - y) = mn + 1 - my - \dfrac{n}{y} > 2$ なので矛盾

ゆえに $x > 0,\ y > 0$ (証明終わり)

(2) $m = 2x,\ n = \dfrac{3}{x}$ なので $mn = 6$

よって $m = 1, 2, 3, 6$

ゆえに $x = \dfrac{1}{2},\ 1,\ \dfrac{3}{2},\ 3\ \cdots$ (答)

(3) a と b を $x = \dfrac{a}{b}$ をみたす互いに素な自然数とする

c と d を $y = \dfrac{c}{d}$ をみたす互いに素な自然数とする

このとき $m = \dfrac{\frac{ac}{b} + d}{c}$ より $\dfrac{ac}{b}$ が自然数なので a と b が互いに素であることから $c = kb$ (k は自然数)

さらに $m = \dfrac{a + \frac{bd}{c}}{b}$ より $b = k'c$ (k' は自然数)

よって $k = 1,\ k' = 1$ なので $b = c$

同様にすると $n = \dfrac{\frac{ac}{d} + 2b}{a}$ より $a = \ell d$ (ℓ は自然数)

さらに $n = \dfrac{c + \frac{2bd}{a}}{d}$ より $2d = \ell' a$ (ℓ' は自然数)

よって $(\ell, \ell') = (1, 2),\ (2, 1)$ なので $a = d$ あるいは $a = 2d$

(i) $a = d,\ b = c$ のとき $y = \dfrac{1}{x}$ なので (2) の結果より $(x, y) = \left(\dfrac{1}{2}, 2\right),\ (1, 1),\ \left(\dfrac{3}{2}, \dfrac{2}{3}\right),\ \left(3, \dfrac{1}{3}\right)$

(ii) $a = 2d,\ b = c$ のとき $y = \dfrac{2}{x}$ なので $m = \dfrac{3}{2}x,\ n = \dfrac{4}{x}$

よって $mn = 6$ なので $m = 1, 2, 3, 6$

ゆえに $(x, y) = \left(\dfrac{2}{3}, 3\right),\ \left(\dfrac{4}{3}, \dfrac{3}{2}\right),\ (2, 1),\ \left(4, \dfrac{1}{2}\right)$

したがって (i), (ii) より $(x, y) = \left(\dfrac{1}{2}, 2\right),\ (1, 1),\ \left(\dfrac{3}{2}, \dfrac{2}{3}\right),\ \left(3, \dfrac{1}{3}\right),\ \left(\dfrac{2}{3}, 3\right),\ \left(\dfrac{4}{3}, \dfrac{3}{2}\right),\ (2, 1),\ \left(4, \dfrac{1}{2}\right)\ \cdots$ (答)

$\boxed{2}$

(1) $S_1 = a_1 = 1$

$S_2 = a_1 + a_2 = pS_1 + 1$　ゆえに　$a_2 = p$　…①　…(答)

$S_3 = a_1 + a_2 + a_3 = pS_2 + 2$　ゆえに　$a_3 = p^2 + 1$　　…(答)

(2) $n \geqq 2$ のとき

$S_{n+1} = pS_n + n$　…②

$S_n = pS_{n-1} + n - 1$　…③

②−③より $S_{n+1} - S_n = p(S_n - S_{n-1}) + 1$

ここで，$S_{n+1} - S_n = a_{n+1}$ であるので，$a_{n+1} = pa_n + 1$　…④　　…(答)

(3)(i) $p = 1$ のとき，$n \geqq 3$ において④より

$a_n = a_{n-1} + 1 = a_{n-2} + 1 + 1 = \cdots = a_2 + (n-2)$　よって，$a_n = n - 1$　…⑤

ゆえに，$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \sum_{k=3}^{n}(k-1) = 1 + 1 + \sum_{k=1}^{n}(k-1) - 0 - 1 = 1 + \frac{n(n-1)}{2}$

(ii) $p \neq 1$ のとき，$n \geqq 3$ において④より $a_n - \frac{1}{1-p} = p\left(a_{n-1} - \frac{1}{1-p}\right) = p^{n-2}\left(a_2 - \frac{1}{1-p}\right)$

よって，$a_n = \frac{1}{1-p} + p^{n-2}\left(p - \frac{1}{1-p}\right)$　…⑥

ゆえに，

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \sum_{k=3}^{n}\left(\frac{1}{1-p} + p^{k-2}\left(p - \frac{1}{1-p}\right)\right) = 1 + p + \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{1-p} + p^{k-2}\left(p - \frac{1}{1-p}\right)\right) - \frac{p-1}{p} - p$$

$$= \frac{1}{p} + \frac{n}{1-p} + \left(1 - \frac{1}{p(1-p)}\right)\frac{1-p^n}{1-p}$$

したがって，$S_n = \begin{cases} 1 + \dfrac{n(n-1)}{2} & (p = 1) \\ \dfrac{1}{p} + \dfrac{n}{1-p} + \left(1 - \dfrac{1}{p(1-p)}\right)\dfrac{1-p^n}{1-p} & (p \neq 1) \end{cases}$　…(答)

$\boxed{3}$

(1)

題意より， $-5 < t < 7$ ・・・①である． α の法線ベクトルを $\vec{n} = (a, b, c)$ ・・②おくと，題意より，

$\vec{n} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AB}} = -a + b = 0$ ・・・③， $\vec{n} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}} = -a + c = 0$ ・・・④である．②，③，④より， $\vec{n} = a(1,1,1)$ ・・・⑤である．P が α 上にあると仮定すると， $\vec{n} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AP}} = a\left(s - 1 + t + \frac{9}{s}\right) = 0$ $\cdots$ ⑥ となる． $\vec{n} \neq \vec{0}$ であるので，⑤より $a \neq 0$ ・・・⑦である．⑥，⑦より， $s - 1 + t + \frac{9}{s} = 0$ $\cdots$ ⑧ となる．⑧を整理すると，

$s^2 + (t-1)s + 9 = 0$ $\cdots$ ⑧′ ①より，⑧′ の判別式 $D = (t-1)^2 - 36 < 0$ となり，⑧′ は実数解をもたないので， s が実数に矛盾する，故に，P は α 上にない．（証明終わり）

(2)

H の座標を (h_1, h_2, h_3) とする．題意より， $\overrightarrow{\mathrm{PH}} = \left(h_1 - s, h_2 - t, h_3 - \frac{9}{s}\right)$ $\cdots$ ⑨ は， $\vec{n}$ と平行なので，

⑤，⑨より， $\left(h_1 - s, h_2 - t, h_3 - \frac{9}{s}\right) = k(1,1,1)$ となる 0 でない実数 k が存在する．故に， $h_1 - s = k$ $\cdots$ ⑩， $h_2 - t = k$ $\cdots$ ⑪， $h_3 - \frac{9}{s} = k$ $\cdots$ ⑫ となる．A，H が α 上にあるので，

$\vec{n} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AH}} = a(h_1 - 1 + h_2 + h_3) = 0$ $\cdots$ ⑬ となる．⑦，⑬より， $h_1 - 1 + h_2 + h_3 = 0$ $\cdots$ ⑬′

⑩，⑪，⑫，⑬′ より， k を消去して整理すると， $h_1 = \frac{2}{3}s - \frac{1}{3}t - \frac{3}{s} + \frac{1}{3}$ $\cdots$ ⑭ ，

$h_2 = -\frac{1}{3}s + \frac{2}{3}t - \frac{3}{s} + \frac{1}{3}$ $\cdots$ ⑮ ， $h_3 = -\frac{1}{3}s - \frac{1}{3}t + \frac{6}{s} + \frac{1}{3}$ $\cdots$ ⑯ となる．

故に，H の座標は， $\left(\frac{2}{3}s - \frac{1}{3}t - \frac{3}{s} + \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}s + \frac{2}{3}t - \frac{3}{s} + \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}s - \frac{1}{3}t + \frac{6}{s} + \frac{1}{3}\right)$ $\cdots$ (答)

(3)

⑨，⑭，⑮，⑯より，

$\overrightarrow{\mathrm{PH}} = \left(-\frac{1}{3}s - \frac{1}{3}t - \frac{3}{s} + \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}s - \frac{1}{3}t - \frac{3}{s} + \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}s - \frac{1}{3}t - \frac{3}{s} + \frac{1}{3}\right)$ $\cdots$ ⑰ となる．ここで，

$u = -\frac{1}{3}s - \frac{1}{3}t - \frac{3}{s} + \frac{1}{3}$ とおくと，⑰は， $\overrightarrow{\mathrm{PH}} = (u, u, u)$ $\cdots$ ⑰′ となる．題意より， $\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \overrightarrow{\mathrm{OP}} + l\overrightarrow{\mathrm{PH}}$ $\cdots$ ⑱ となる 0 でない実数 l が存在する． ⑰′，⑱と題意より， $(0, q, 0) = \left(s + lu, t + lu, \frac{9}{s} + lu\right)$ $\cdots$ ⑲ である．故に， $s = \frac{9}{s}$ $\cdots$ ⑳ となる．⑳より， $s = \pm 3$ $\cdots$ (答)

$\boxed{4}$

(1) C_1 と C_2 の接点の x 座標を a とすると

接点における C_1, C_2 の接線の傾きはそれぞれ $-2a,\ 3a^2-1$

よって $-2a = 3a^2 - 1$ なので $a = -1,\ \dfrac{1}{3}$

ゆえに接点が C_1 上にあることから接点の座標は $(-1, 3),\ \left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{35}{9}\right)$

接点は C_2 上にもあることから $p = 3,\ \dfrac{113}{27}$

C_1 と C_2 の共有点の x 座標を b とすると

(i) 接点の座標が $(-1,3)$ のとき $4-b^2 = b^3 - b + 3$ なので $b^3 + b^2 - b - 1 = 0$

$(b+1)^2(b-1) = 0$ なので $b = -1,\ 1$

$f(x) = 4 - x^2,\ g(x) = x^3 - x + 3$ とおくと $f(0) = 4,\ g(0) = 3$ なので $f(0) > g(0)$

よって $S = \displaystyle\int_{-1}^{1} \{(4-x^2) - (x^3 - x + 3)\}\,dx = \left[-\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x\right]_{-1}^{1} = \frac{4}{3}$

(ii) 接点の座標が $\left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{35}{9}\right)$ のとき $4 - b^2 = b^3 - b + \dfrac{113}{27}$ なので $b^3 + b^2 - b + \dfrac{5}{27} = 0$

$\left(b - \dfrac{1}{3}\right)^2\left(b + \dfrac{5}{3}\right) = 0$ なので $b = -\dfrac{5}{3},\ \dfrac{1}{3}$

$f(x) = 4 - x^2,\ g(x) = x^3 - x + \dfrac{113}{27}$ とおくと $f(0) = 4,\ g(0) = \dfrac{114}{27}$ なので $f(0) < g(0)$

よって $S = \displaystyle\int_{-\frac{5}{3}}^{\frac{1}{3}} \left\{\left(x^3 - x + \frac{113}{27}\right) - (4 - x^2)\right\} dx = \left[\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{27}x\right]_{-\frac{5}{3}}^{\frac{1}{3}} = \frac{4}{3}$

ゆえに $(p, S) = \left(3, \dfrac{4}{3}\right), \left(\dfrac{113}{27}, \dfrac{4}{3}\right)$ $\cdots$ (答)

(2) 共有点の x 座標の値が $-\dfrac{1}{2}$ である共有点の y 座標の値は $\dfrac{15}{4}$ なので $p = \dfrac{27}{8}$

よって C_1 と C_2 の共有点の x 座標を b とすると $4 - b^2 = b^3 - b + \dfrac{27}{8}$ なので

$$b^3 + b^2 - b - \frac{5}{8} = \left(b + \frac{1}{2}\right)\left(b^2 + \frac{1}{2}b - \frac{5}{4}\right) = \left(b + \frac{1}{2}\right)\left(b + \frac{\sqrt{21}+1}{4}\right)\left(b - \frac{\sqrt{21}-1}{4}\right) = 0$$

ゆえに共有点の x 座標の値は $-\dfrac{1}{2},\ -\dfrac{\sqrt{21}+1}{4},\ \dfrac{\sqrt{21}-1}{4}$

$\alpha = -\dfrac{\sqrt{21}+1}{4},\ \beta = \dfrac{\sqrt{21}-1}{4}$ とおくと $\alpha < -\dfrac{1}{2} < \beta$

$f(x) = 4 - x^2,\ g(x) = x^3 - x + \dfrac{27}{8}$ とおくと $f(0) = 4,\ g(0) = \dfrac{27}{8}$ なので $f(0) > g(0)$

$$\begin{aligned}
S_1 + S_2 &= \int_{\alpha}^{-\frac{1}{2}} \left\{\left(x^3 - x + \frac{27}{8}\right) - (4 - x^2)\right\} dx + \int_{-\frac{1}{2}}^{\beta} \left\{(4 - x^2) - \left(x^3 - x + \frac{27}{8}\right)\right\} dx \\
&= \left[\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{8}x\right]_{\alpha}^{-\frac{1}{2}} + \left[\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{8}x\right]_{\beta}^{-\frac{1}{2}} \\
&= 2\left\{\frac{1}{4}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^4 + \frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^3 - \frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{8}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\right\} \\
&\quad - \left\{\frac{1}{4}(\alpha^4 + \beta^4) + \frac{1}{3}(\alpha^3 + \beta^3) - \frac{1}{2}(\alpha^2 + \beta^2) - \frac{5}{8}(\alpha + \beta)\right\}
\end{aligned}$$

α, β は $x^2 + \dfrac{1}{2}x - \dfrac{5}{4} = 0$ の解であることを踏まえると解と係数の関係より $\alpha + \beta = -\dfrac{1}{2},\ \alpha\beta = -\dfrac{5}{4}$ なので

$\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = \dfrac{11}{4}$, $\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta) = -2$, $\alpha^4 + \beta^4 = (\alpha^2 + \beta^2)^2 - 2(\alpha\beta)^2 = \dfrac{71}{16}$

したがって $S_1 + S_2 = \dfrac{31}{96} - \left\{\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{71}{16} + \dfrac{1}{3}\cdot(-2) - \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{11}{4} - \dfrac{5}{8}\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)\right\} = \dfrac{181}{192}$ $\cdots$ (答)