令和2年度　前期日程　入学者選抜学力検査問題

数学（生命分子化学科・森林科学科）

【 $\boxed{1}$ 解答例】

(1) $y = |x^2 - 8x| - 2$ とする.

$x \geqq 0$, $x \geqq 8$ のとき, $y = x^2 - 8x - 2 = (x-4)^2 - 18$

$0 < x < 8$ のとき, $y = -x^2 + 8x - 2 = -(x-4)^2 + 14$

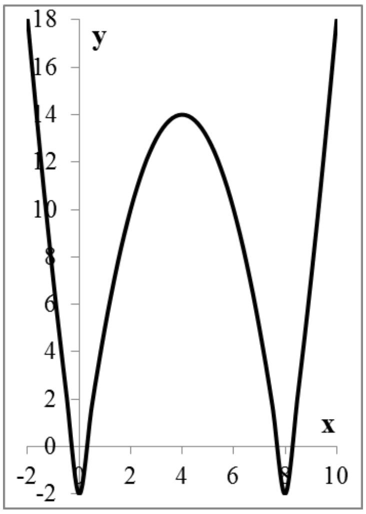
よって実数解の個数は

$k < -2$ のとき, 0 個,

$k = -2$, $k > 14$ のとき, 2 個,

$k = 14$ のとき, 実数解の個数は 3 個,

$-2 < k < 14$ のとき, 実数解の個数は 4 個



(2) $N = 25a + 5b + c = a + 6b + 36c$

これから　$b = 24a - 35c$

ここで　$1 \leq a \leq 4$ ，$0 \leq b \leq 4$ ，$1 \leq c \leq 4$ 　なので,

$a = 3$ ，$b = 2$ ，$c = 2$ 　　よって　$N = 87$

(3) 中央値が 173 で a, b, c 以外の 4 人の身長ではないので,

a, b, c のいずれかは 173 である.

残りの 2 つを x, y $(x < y)$ とすると,

$x + y + 173 + 164 + 172 + 174 + 176 = 172 \times 7$ 　　・・①

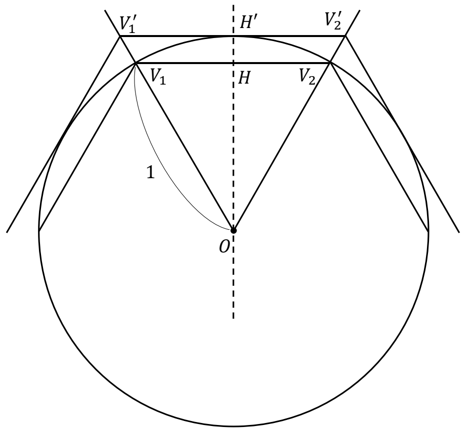
$(x-172)^2 + (y-172)^2 + 1^2 + (-8)^2 + 0^2 + 2^2 + 4^2 = \left(\sqrt{14}\right)^2 \times 7$ 　・・②

① ，②より, $x = 170$, $y = 175$ 　よって, $a = 170$, $b = 173$, $c = 175$

【 $\boxed{2}$ 解答例】

(1) 頂点を O とする半径 1 の円を考える．図のように円に内接する正 n 角形の各頂点を，右回りに V_1, V_2, …, V_n とし，円に外接する正 n 角形の各頂点を V_1', V_2', …, V_n' とする．また O から V_1V_2 および $V_1'V_2'$ に引いた垂線の足をそれぞれ H, H' とする．

$\angle V_1OH = \frac{\pi}{n}$ より，$\triangle V_1OH$ で $V_1H = \sin\frac{\pi}{n}$, $OH = \cos\frac{\pi}{n}$ である．



$$S_n = n\triangle V_1OV_2$$
$$= 2n\triangle V_1OH$$
$$= 2n\cdot\frac{1}{2}\cdot\sin\frac{\pi}{n}\cos\frac{\pi}{n}$$
$$= n\sin\frac{\pi}{n}\cos\frac{\pi}{n}$$
$$= \frac{n}{2}\sin\frac{2\pi}{n}$$

(2) $\angle V_1'OH' = \frac{\pi}{n}$ より，$\triangle V_1'OH'$ で $V_1'H' = \tan\frac{\pi}{n}$，$OH' = 1$ である．

$$S_n' = n\triangle V_1'OV_2' = 2n\triangle V_1'OH' = 2n\cdot\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\tan\frac{\pi}{n} = n\tan\frac{\pi}{n}$$

(3) $n = 12$ のとき，$S_{12} = 6\cdot\sin\frac{\pi}{6} = 3$

(4) 半径 1 の円の面積は，円に内接する正 n 角形の面積より大きく，円に外接する正 n 角形の面積より小さい．よって，

$$S_n < \pi < S_n' \quad\Leftrightarrow\quad \frac{n}{2}\sin\frac{2\pi}{n} < \pi < n\tan\frac{\pi}{n}$$

$n = 12$ のとき，$3 < \pi < 12\tan\frac{\pi}{12}$

ここで，

$$12\tan\frac{\pi}{12} = 12\sqrt{\frac{1-\cos\frac{\pi}{6}}{1+\cos\frac{\pi}{6}}}$$

$$= 12\sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}}$$

$= 12\left(2 - \sqrt{3}\right)$

$1.7320 < \sqrt{3} < 1.7321$より，$3.2148 < 12\tan\frac{\pi}{12} < 3.216$

よって

$3 < \pi < 3.216$

$\Longrightarrow 3 < \pi < 3.22$

【 $\boxed{3}$ 解答例】

(1) 点 D の座標を $\mathrm{D}(X, Y, Z)$ とすると

$$X = \frac{-(1+t) \times 2 + t \times (-1)}{t-(1+t)} = 3t+2$$

$$Y = \frac{-(1+t) \times 2 + t \times 1}{t-(1+t)} = t+2$$

$$Z = \frac{-(1+t) \times 0 + t \times 2}{t-(1+t)} = -2t$$

したがって点 D の座標は $\mathrm{D}(3t+2,\ t+2, -2t)$

(2) $\angle\mathrm{CAD} = \frac{\pi}{2}$ なので，$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} = 0$ となる．

$\overrightarrow{AC} = (2t-4,\ t-4,\ t+2)$，$\overrightarrow{AD} = (3t,\ t,\ -2t)$ なので

$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} = (2t-4) \times 3t + (t-4) \times t + (t+2)(-2t) = 5t^2 - 20t = 5t(t-4)$
$= 0$

$t > 0$ なので $t = 4$

(3) 球面 S の中心は線分 CD の中点である．これを M とする．

球面 S が点 A を通るとき，$t = 4$ なので，点 C，点 D の座標はそれぞれ

$\mathrm{C}(6,\ 2,\ 6)$，$\mathrm{D}(14,\ 6,\ -8)$

点 M の座標は，$\mathrm{M}(10,\ 4,\ -1)$

球面 S と平面 α の接点 A と点 M を通る直線は，点 A と平面 α 上の任意の点 $\mathrm{R}(x,\ y,\ z)$ を通る直線と垂直となる．

すなわち，$\overrightarrow{AM} = (8,\ 2,\ -1)$ と $\overrightarrow{AR} = (x-2,\ y-2,\ z)$ の内積が 0 となるので，$8(x-2) + 2(y-2) - z = 0$

整理すると，$8x + 2y - z - 20 = 0$ となり，平面 α の方程式が得られる．

点 P，点 Q の座標はそれぞれ $\mathrm{P}(0,\ 10,\ 0)$，$\mathrm{Q}(0,\ 0,\ -20)$

したがって△OPQ は，線分 OP を底辺とすると底辺の長さが 10，高さが 20 の直角三角形となるので，その面積は 100